Nukleo - Ogólnopolski Konkurs Wiedzy o Energii Jądrowej

Edycja III, rok szkolny 2022/2023

ETAP 2

ROZWIĄZANIA ZADAŃ Z TREŚCIĄ

Poniżej przedstawiamy przykładowe rozwiązania zadań z treścią.

Zadanie 1 [6 punktów]

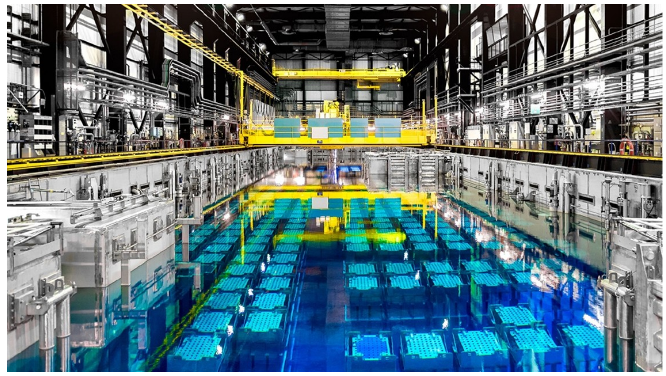
Wstęp:
W reaktorze jądrowym chłodziwo (zwykle woda) jest podgrzewane przez przenoszenie ciepła z paliwa jądrowego. Ciepło to produkowane jest w reakcji rozszczepienia jąder uranu. Paliwo jądrowe w rdzeniu reaktora ma postać kaset paliwowych, jak pokazano na Rys. 1. Zużyte kasety paliwowe wyjmowane są z reaktora jądrowego, jednak wciąż mają pewną moc cieplną, tzn. wciąż generują ciepło, mimo że nie zachodzi już reakcja rozszczepienia. Źródłem tego ciepła są fragmenty rozszczepienia, które w wyniku rozpadu promieniotwórczego emitują promieniowanie (energię). Dlatego zużyte kasety paliwowe trzeba chłodzić nawet po wyjęciu z reaktora jądrowego jeszcze przez wiele lat. W tym celu umieszcza się je w specjalnych basenach wypełnionych wodą, jak w przykładzie na Rys. 2.

Zadanie:
W basenie znajduje się $m = 1000$ ton wody pod ciśnieniem atmosferycznym i temperaturze T_0. Woda w basenie jest cały czas przepompowywana, dzięki czemu utrzymywana jest stała temperatura T_0. W przypadku awarii pompy jedna kaseta paliwowa jest w stanie podgrzać całą objętość wody w basenie o $\Delta T = 4$ °C w czasie $t = 72$ godziny. W tym samym czasie 10 zestawów paliwowych podgrzałoby całą objętość wody do $T_2 = 70{,}1$ °C.

<u>Odpowiedz na pytania:</u>
1) Jaka jest moc cieplna jednej kasety paliwowej?
2) Ile wynosi początkowa temperatura T_0 utrzymywana w basenie?
3) Ile czasu zajęłoby doprowadzenie do wrzenia wody w basenie przez 100 kaset paliwowych?

Należy przyjąć następujące założenia: pojemność cieplna wody jest niezależna od temperatury i wynosi 4200 $\frac{J}{kg \cdot K}$, moc cieplna kaset paliwowych jest stała w czasie.

Rysunek 1: *Kaseta paliwowa typowego reaktora jądrowego, źródło: World Nuclear Association*



Rysunek 2: *Basen do przechowywania zużytych kaset paliwowych, źródło: Nuclear Energy Agency*

Rozwiązanie:

1) Ciepło Q generowane przez kasetę paliwową:

$$Q = P \cdot t \tag{1}$$

gdzie P to moc cieplna kasety, t - czas.

Z kolei ilość ciepła Q potrzebna do ogrzania wody w basenie jest proporcjonalna do pojemności cieplnej wody oraz różnicy temperatur:

$$Q = C \cdot \Delta T$$

gdzie C - pojemność cieplna wody, ΔT - różnica temperatur. Z definicji pojemności cieplnej ciała otrzymujemy zależność:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \tag{2}$$

gdzie m - masa wody, c - ciepło właściwe wody.

Przyrównując prawe strony równań 1 i 2 otrzymujemy:

$$P \cdot t = m \cdot c \cdot \Delta T \tag{3}$$

Szukamy mocy cieplnej kasety paliwowej P. Po przekształceniu powyższej zależności otrzymujemy:

$$P = \frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{t}$$

Z treści zadania wiemy, że jedna kaseta paliwowa jest w stanie podgrzać całą objętość wody o masie $m = \mathit{1000\ ton} = 10^6\ kg$ w basenie o $\Delta T = 4\ ^\circ C$ w czasie $t = \mathit{72\ godziny} = \mathit{259200\ sekund}$. Należy zauważyć, że zmiana temperatury o jeden stopień Celsjusza odpowiada zmianie temperatury o jeden kelwin. Zatem $\Delta T = 4\ ^\circ C = 4\ K$ Podstawiamy dane liczbowe do powyższego wzoru:

$$P = \frac{10^6 kg \cdot 4200 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 4K}{259200 s} \approx 65 \cdot 10^3 \frac{J}{s}$$

2) Aby obliczyć początkową temperaturę T_0 wody w basenie korzystamy z wyprowadzonej już w punkcie 1) zależności 3. W tym przypadku korzystamy z informacji, że 10 zestawów paliwowych podgrzałoby całą objętość wody do $T_2 = 70{,}1\ ^\circ C$ w czasie $t = 72$ *godziny*, zatem $\Delta T = T_2 - T_0$:

$$10 \cdot P \cdot t = m \cdot c \cdot (T_2 - T_0)$$

Przekształcamy wzór, aby otrzymać T_0:

$$T_0 = T_2 - \frac{10 \cdot t \cdot P}{c \cdot m}$$

Podstawiamy dane liczbowe do wzoru. Zauważamy, że $T_2 = 70{,}1\ ^\circ C = 343{,}25\ K$.

$$T_0 = 343,25K - \frac{10 \cdot 259200 s \cdot 65 \cdot 10^3 \frac{J}{s}}{4200 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 10^6 kg} = 343,25K - 40,1K = 303,15K = 30^\circ C$$

3) Ponownie korzystamy z zależności 3. Tym razem jednak szukamy czasu t potrzebnego do doprowadzenia wody do wrzenia przez 100 kaset paliwowych. Zatem $\Delta T = T_W - T_0 = 100^\circ C - 30^\circ C = 70^\circ C = 70K$, gdzie T_W - temperatura wrzenia wody. Otrzymujemy:

$$100 \cdot P \cdot t = m \cdot c \cdot (T_W - T_0)$$

Przekształcamy wzór, aby wyznaczyć czas t:

$$t = \frac{m \cdot c \cdot (T_W - T_0)}{100 \cdot P}$$

Podstawiamy dane liczbowe:

$$t = \frac{10^6 kg \cdot 4200 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 70K}{100 \cdot 65 \cdot 10^3 \frac{J}{s}} = 45231 s \approx 12,6 h$$

Odpowiedź: Moc cieplna jednej kasety paliwowej wynosi: $P = 65 \cdot 10^3 J/s$. Początkowa temperatura wody w basenie wynosi $T_0 = 30^\circ C$. 100 kaset paliwowych potrzebuje około *12,6 h*, aby doprowadzić wodę w basenie do wrzenia.

Zadanie 2 [6 punktów]

Wstęp:

Radon jest promieniotwórczym gazem szlachetnym, który posiada cztery naturalne izotopy promieniotwórcze: ^{218}Rn, ^{219}Rn, ^{220}Rn i ^{222}Rn. Spośród wymienionych izotopów, najdłuższy okres połowicznego rozpadu ma ^{222}Rn (3,8 dnia). W przypadku pozostałych, okres połowicznego rozpadu jest krótszy niż 1 minuta. ^{222}Rn jest jednym z izotopów wchodzących w skład promieniotwórczego szeregu uranowo-radowego, powstaje w wyniku rozpadu radu ^{226}Ra o okresie połowicznego rozpadu 1600 lat (Rys. 3).

^{222}Rn jest izotopem, który występuje na całej naszej planecie, a poziom jego stężenia zależy przede wszystkim od budowy geologicznej i zawartości uranu w podłożu. Wysoka zawartość uranu i wynikające z jego obecności duże uwolnienia radonu, są charakterystyczne dla skał granitowych. W związku z tym na obszarach o podłożu granitowym stężenie radonu w powietrzu jest wyższe.

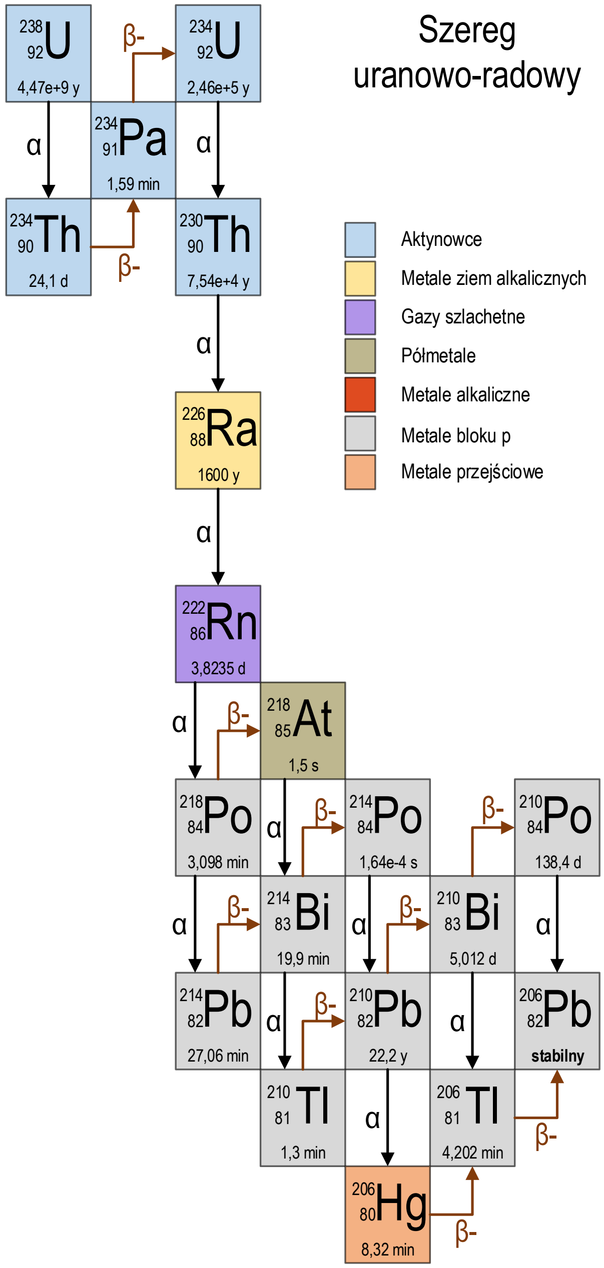
Zagrożenie promieniotwórcze związane z narażeniem na radon wynika w głównej mierze nie tyle z oddziaływania samego radonu, co z oddziaływania produktów jego rozpadu promieniotwórczego, czyli głównie izotopów promieniotwórczych polonu, ołowiu i bizmutu. Wysokie stężenia radonu notuje się m.in. na terenach Skandynawii, Czech lub Hiszpanii. W Polsce najwyższe stężenia Rn-222 rejestruje się w południowych obszarach (województwa dolnośląskie, opolskie, podkarpackie, świętokrzyskie, śląskie i lubelskie).

Promieniowanie pochodzące od radonu stanowi 40–50% dawki promieniowania, jaką otrzymuje mieszkaniec Polski od źródeł naturalnych. Zgodnie z obowiązującymi w Polsce przepisami, średnioroczne stężenie promieniotwórczego radonu w powietrzu w miejscach pracy wewnątrz pomieszczeń oraz pomieszczeniach przeznaczonych na pobyt ludzi, nie może przekraczać 300 Bq/m^3 (bekereli na metr sześcienny). Bq - bekerel jest miarą aktywności promieniotwórczej, 1 Bq = 1 rozpad promieniotwórczy na sekundę.

Zadanie:

Oblicz ile jąder ^{222}Rn rozpadnie się w ciągu jednej godziny w płucach osoby, która przebywa w pomieszczeniu, w którym stężenie radonu w powietrzu wynosi 100 Bq/m^3. Przyjmij następujące założenia:

- osoba przebywająca w pomieszczeniu bierze jeden oddech co 5 sekund,
- objętość jednego oddechu: 3 litry,
- cały wdychany radon trafia do płuc.



Rysunek 3: *Szereg promieniotwórczy uranowo-radowy, źródło: opracowanie własne*

Rozwiązanie:

Wiemy, że:

$$1m^3 = 1000 \text{ litrów}$$

Co 5 s osoba bierze jeden oddech (3 litry powietrza), po którym w płucach gromadzi się radon o aktywności:

$$A = 3l \cdot 100\frac{Bq}{m^3} \cdot \frac{1m^3}{1000l} = 0,3Bq \; [Bq = \frac{1}{s}] \tag{4}$$

W czasie każdego wdechu jądra ^{222}Rn będą kumulować się w płucach (zaniedbujemy fakt, że jądra rozpadają się w trakcie samego wdechu). Dlatego dla okresu pomiędzy wdechami, z prawa rozpadu promieniotwórczego:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \text{ lub prościej } N(t) = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

możemy zapisać ogólną zależność liczby jąder ^{222}Rn, które rozpadną się, od czasu $N(t)$:

$$N(t) = N_0 - N_0 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$$

lub inaczej:

$$N(t) = N_0[1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}] \tag{5}$$

gdzie $T_{1/2}$ to czas połowicznego rozpadu ^{222}Rn:

$$T_{1/2} = 3,8d = 328320s$$

W ciągu 1 godziny człowiek wykona:

$$\frac{3600s}{5s} = 720 \text{ wdechy}$$

W ciągu jednego wdechu wchłonięte zostanie do płuc N_0 jąder ^{222}Rn:

$$N_0 = A \cdot \frac{T_{1/2}}{ln2} = \frac{0,3\frac{1}{s} \cdot 328320s}{0,693} = 142130$$

Korzystając z 5 możemy zapisać N(t) dla każdego kolejnego wdechu:
Po pierwszym wdechu:

$$N_0 = 142130$$

Czas, w którym obserwujemy ich rozpad wynosi: 3600 s - τ, gdzie τ to czas pomiędzy kolejnymi wdechami, $\tau = 5$ s.
Po drugim wdechu:

$$N_1 = N_0[1 - 2^{-\frac{t-\tau}{T_{1/2}}}]$$

Czas, w którym obserwujemy ich rozpad wynosi 3600 s - $2 \cdot \tau$.
Po trzecim wdechu:

$$N_2 = N_0[1 - 2^{-\frac{t-2\tau}{T_{1/2}}}]$$

Czas, w którym obserwujemy ich rozpad wynosi 3600 s - $3 \cdot \tau$.

(...)

Możemy zapisać równanie po i-tym wdechu:

$$N_i = N_0[1 - 2^{-\frac{t-i\tau}{T_{1/2}}}]$$

Całkowita liczba jąder ^{222}Rn, która rozpadnie się $N_{\text{całkowite}}$:

$$N_{\text{całkowite}} = N_0 + N_1 + N_2 + ... + N_{i_{max}}$$

gdzie $i_{max} = 719$. Możemy zatem zapisać:

$$N_{\text{całkowite}} = N_0[720 - \sum_{i=1}^{i_{max}} 2^{-\frac{t-i\tau}{T_{1/2}}}]$$

$$N_{\text{całkowite}} = N_0[720 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \cdot \sum_{i=1}^{i_{max}} (2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}})^i] \tag{6}$$

gdzie t = 3600 s. Zauważamy, że mamy do czynienia z ciągiem geometrycznym:

$$\sum_{i=1}^{i_{max}} (2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}})^i$$

Suma ciągu geometrycznego wyrażona jest wzorem:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

gdzie:

$$a_1 = 2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}}$$

$$q = 2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}}$$

$n = i_{max} = 719$ wdechów. Zatem suma ciągu geometrycznego wynosi:

$$S_n = 2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}} \cdot \frac{1 - (2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}})^{i_{max}}}{1 - 2^{\frac{\tau}{T_{1/2}}}} = 1,000010556 \cdot \frac{1 - 1,007618599}{1 - 1,000010556} \approx 721,739$$

Zatem liczba jąder ^{222}Rn, która rozpadnie się w ciągu 1 godziny z równania 6:

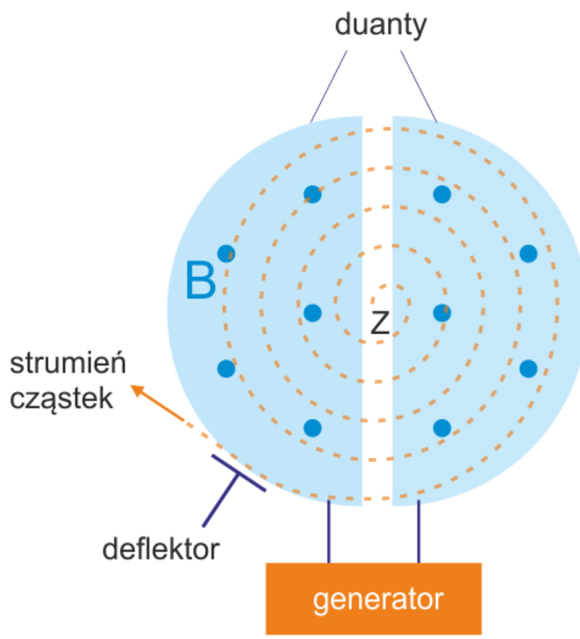
$$N_{\text{całkowite}} = 142130 \cdot [720 - 0,992429 \cdot 721,739] = 142130 \cdot [720 - 716,274] = 142130 \cdot 3,726 \approx 529576$$

Odpowiedź: W ciągu 1 godziny rozpadnie się 529576 jąder atomowych ^{222}Rn.
Komentarz - w zależności od precyzji obliczeń (przybliżeń na kolejnych etapach) wartość końcowa $N_{\text{całkowite}}$ może się różnić.

Zadanie 3 [10 punktów]

Wstęp:

Cyklotron jest przykładem akceleratora cyklicznego. Zbudowany jest z dwóch, cylindrycznych elektrod, zwanych duantami, które są umieszczone w jednorodnym polu magnetycznym B prostopadłym do płaszczyzny duantów. Do tych elektrod doprowadzone jest z generatora zmienne napięcie, które cyklicznie zmienia kierunek pola elektrycznego w szczelinie pomiędzy duantami. Schemat cyklotronu przedstawiono na Rys. 4.



Rysunek 4: *Schemat cyklotronu, źródło: Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie Centrum e-Learningu*

Jeżeli ze źródła, które znajduje się w środku cyklotronu, zostanie wyemitowana naładowana cząstka, to porusza się ona pod wpływem pola elektrycznego w stronę jednego z duantów. Gdy cząstka wejdzie do duantów, wówczas przestaje na nią działać pole elektryczne (ekranowane przez miedziane ścianki duantów), natomiast zaczyna działać pole magnetyczne. Pod jego wpływem cząstka porusza się po torze kołowym i ponownie wchodzi w obszar pomiędzy duantami. Jeżeli równocześnie zostanie zmieniony kierunek pola elektrycznego pomiędzy nimi, to cząstka doznaje ponownego przyspieszenia w szczelinie. Ten proces jest powtarzany cyklicznie, pod warunkiem, że częstotliwość, z jaką krąży cząstka, jest zsynchronizowana z częstotliwością zmian pola elektrycznego pomiędzy duantami.

Cząstka przechodząc przez szczelinę pomiędzy duantami zwiększa swoją prędkość (przyspieszana polem elektrycznym) i równocześnie zwiększa promień R swojej orbity. Cząstki poruszają się po spirali. Po osiągnięciu maksymalnego promienia cząstki są wyprowadzane poza cyklotron za pomocą elektrody nazywanej deflektorem.

Zadanie:
Jaki powinien być promień, po jakim porusza się deuteron w cyklotronie, aby opuszczał go posiadając energię kinetyczną równą 10 MeV? Ile razy deuteron przebędzie odległość między duantami w cyklotronie, gdy różnica potencjałów między nimi będzie wynosiła 50 kV? Określ częstotliwość, jaką musi mieć źródło napięcia cyklotronu, jeżeli pole magnetyczne w akceleratorze wynosi 1,5 T, a masa deuteronu to $3{,}3{\cdot}10^{-27}$ kg? Wyprowadź wszystkie potrzebne zależności na częstotliwość oraz promień.

Rozwiązanie:
W centrum cyklotronu znajduje się źródło jonów. Deuteron, o ładunku dodatnim, wylatujący ze źródła porusza się w kierunku ujemnie naładowanego duantu. Dzięki temu jest przyśpieszana. W przestrzeni pomiędzy duantami deuteron nie „odczuwa” działania pola elektrycznego, gdyż ono tam nie występuje. Pole magnetyczne nie jest ekranowane przez duanty, także deuteron będzie poruszał się (w obszarze duantów) po torze kołowym, którego promień zależy od prędkości cząstki.

W czasie kiedy deuteron porusza się w kierunku ujemnie naładowanego duantu, napięcie między dwoma duantami zmieni swoją polaryzację. W konsekwencji, cząstka będzie miała przed sobą znowu ujemnie naładowany duant, a wiec jest ponownie przyspieszana. Proces ten trwa, deuteron krąży dzięki oscylacji napięcia między duantami, do momentu aż poruszając się „po spirali” osiągnie krawędź duantu i opuści cyklotron.

Aby deuteron był efektywnie przyspieszany, jego częstotliwość f z jaką krąży w polu magnetycznym musi być równa częstotliwości źródła zasilania. Jeżeli częstotliwość generatora jest równa częstotliwości obiegu cząstek, to są one przyspieszane podczas przelotu między duantami. Aby energia poruszającego się po orbicie kołowej protonu wzrosła, częstotliwość źródła w przestrzeni między duantami musi być równa częstotliwości, z jaką cząstka orbituje w polu magnetycznym.

Za każdym razem kiedy cząstka przyspiesza zyskuje ona energię proporcjonalną do napięcia między duantami. Warto pamiętać, że początkowo energia kinetyczna deuteronu przy wyjściu z centrum cyklotronu jest na tyle mała, że można ja zaniedbać. Cząstka przebiega pomiędzy duantami tyle razy, aby uzyskać oczekiwaną energię kinetyczną i dalej kierowana jest do stanowiska pomiarowego.

Starając się opisać cały proces językiem matematycznym, rozważmy siłę Lorentza F_m działającą na cząstkę o ładunku e (ładunek deuteronu) o prędkości v, która znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B:

$$F_m = e \cdot v \cdot B.$$

W ruchu jednostajnym po okręgu występuję siła dośrodkowa F_d o wartości

$$F_d = m \cdot a = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Po porównaniu obu równań otrzymujemy zależność, która umożliwia nam wyznaczenie promienia okręgu, po którym poruszają się cząstki

$$e \cdot V \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

$$r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B}.$$

Czas jednego półokręgu, który odpowiada połowie okresu $T/2$, jest równy obwodowi półkola $\pi \cdot r$ podzielonemu przez prędkość cząstki v

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi \cdot r}{v}$$

Podstawiając za promień, otrzymujemy

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{v} \cdot \frac{m \cdot v}{e \cdot B} = \frac{\pi \cdot m}{e \cdot B}.$$

Okres obiegu T nie zależy od prędkości cząstek oraz od ich energii czyli czas jaki upłynął między dwoma przejściami między duantami podczas przyspieszania jest taki sam.
Dla częstotliwości f jest prawdą

$$f = \frac{1}{T} = \frac{e \cdot B}{2\pi \cdot m}.$$

$$f = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} J \cdot 1,5T}{2\pi \cdot 3,3 \cdot 10^{-27} kg} = 11 \cdot 10^6/s.$$

Zakładając przypadek nierelatywistyczny, masa cząstki m jest stała; ładunek e jest zawsze stały. Cyklotron można zatem dostroić przy użyciu zmiennego pola magnetycznego dopóki nie przyspieszymy odpowiednio wiązki.
Biorąc pod uwagę, że początkowa energia kinetyczna deuteronu jest zaniedbywalna, energia kinetyczna jaką uzyska cząstka o ładunku e przyśpieszana napięciem U wynosi

$$E_k = e \cdot U.$$

Aby uzyskać maksymalną energię E_{max}, deuteron musi przejść n-krotnie pomiędzy duantami.

$$E_{max} = n \cdot E_k.$$

Liczbę przejść n deuteronu pomiędzy duantami obliczamy z wyrażenia

$$n = \frac{E_{max}}{E_k} = \frac{E_{max}}{e \cdot U}.$$

$$n = \frac{10^7 eV}{e \cdot 50\ kV}.$$

$$n = \frac{10^7 eV}{5 \cdot 10^4\ eV} = 200.$$

Promień duantu R odpowiada promieniowi okręgu R_{max} po jakim porusza się cząstka o maksymalnej energii. Promień cyklotronu znamy z wyrażenia

$$R_{max} = \frac{m \cdot V}{e \cdot B}.$$

Zakładając maksymalną energię kinetyczną deuterownu (E_{max}), ich prędkość będzie wynosiła

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{max}}{m}},$$

a promień duantu wynosi

$$R_{max} = \frac{\sqrt{2mE_{max}}}{e \cdot B},$$

$$R_{max} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3,3 \cdot 10^{-27} kg \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} J}}{1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1,5 T} \approx 40\ cm.$$

W obliczeniach wykorzystano następujące wartości liczbowe:

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} C,$$

$$1eV = 1e \cdot 1V = 1,602 \cdot 10^{-19} C,$$

$$m = 3,3 \cdot 10^{-27} kg,$$

$$B = 1,5T, \quad U = 50kV, \quad E_{max} = 10MeV = 10^7 eV = 1,6 \cdot 10^{-12} J.$$

Zadanie 4 [10 punktów]

Wstęp:
Przemiana niestabilnego izotopu, któremu towarzyszy emisja cząstki α, β lub γ nazywana jest *rozpadem promieniotwórczym*. Proces ten jest przypadkowy dla pojedynczego izotopu, ale można przyjąć, że zachodzi ze stałym prawdopodobieństwem. Liczba rozpadów promieniotwórczych zachodzących w próbce w pewnym przedziale czasu Δt jest proporcjonalna zarówno do długości tego przedziału czasu jak i liczby jader promieniotwórczych N zawartych w próbce w danej chwili. Stąd zmianę (ubytek) liczby jader ΔN wyraża się zależnością:

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

gdzie współczynnik proporcjonalności λ nazywany jest *stałą rozpadu promieniotwórczego*. Jest to wielkość charakterystyczna dla danego izotopu.

Powszechnie używaną w fizyce jądrowej wielkością charakterystyczną dla konkretnego izotopu jest także czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$. Jest to wielkość, która opisuje czas, po którym połowa liczby jąder promieniotwórczych rozpadnie się. Stała rozpadu promieniotwórczego oraz czas połowicznego rozpadu związane są ze sobą zależnością:

$$T_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \tag{7}$$

Zadanie:
Pluton posiada 4 izotopy, w tym rozszczepialny ^{239}Pu, który rozpada się emitując cząstki α oraz promieniowanie gamma. Średnia energia kinetyczna cząstki α wynosi 5,149 MeV (1 MeV = $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ J), natomiast energię kwantów gamma możemy na potrzeby zadania zaniedbać. Prawdopodobieństwo rozpadu, a zatem liczba wyemitowanych cząstek α jest zależna od czasu połowicznego rozpadu. Dzięki temu czas połowicznego rozpadu ^{239}Pu można określić przez zanurzenie kulki wykonanej z tego izotopu o masie 120,1 g w ciekłym azocie. Objętość ciekłego azotu wystarcza do zatrzymania wszystkich cząstek α emitowanych przez ten izotop, dzięki czemu możemy zaobserwować parowanie cieczy odpowiadającej uwolnieniu mocy 0,231 W. Oblicz okres połowicznego rozpadu ^{239}Pu. Pamiętaj o uwzględnieniu energii odrzutu jądra.

Rozwiązanie:

Opisaną w zadaniu reakcję jądrową możemy zapisać jako:

$$^{239}Pu \longrightarrow \alpha +^{235}U$$

Pomijamy emitowane w tej reakcji promieniowanie gamma.
Można założyć, że jądro plutonu przed rozpadem promieniotwórczym było nieruchome, natomiast w wyniku rozpadu została wyemitowana cząstka α o energii 5,149 MeV oraz jądro uranu o pewnej

energii odrzutu. Aby znaleźć tą energię korzystamy z zasady zachowania pędu oraz wzoru na energię kinetyczną:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

skąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy:

$$M_{U-235} \cdot \sqrt{\frac{2E_{U-235}}{M_{U-235}}} = M_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2E_\alpha}{M_\alpha}}$$

$$M_{U-235} \cdot E_{U-235} = M_\alpha \cdot E_\alpha$$

$$E_{U-235} = \frac{M_\alpha \cdot E_\alpha}{M_{U-235}} = \frac{4}{235} E_\alpha$$

Całkowita energia uwolniona w tej reakcji to suma energii kinetycznej jądra U-235 oraz cząstki α (pomijamy energię promieniowania gamma):

$$E_C = E_{U-235} + E_\alpha = \frac{4}{235} E_\alpha + E_\alpha = \frac{239}{235} E_\alpha = \frac{239}{235} \cdot 5,149 MeV = 5,237 MeV$$

Ubytek jąder (ΔN) określa się wiedząc, jaka moc została uwolniona w pewnym czasie:

$$P = \frac{\Delta N \cdot E_C}{\Delta t}$$

Zakładając, że $\Delta t = 1$ s, otrzymujemy ubytek jąder w ciągu 1 s:

$$\Delta N = \frac{0,231 \frac{J}{s} \cdot 1s}{5,237 \cdot 10^6 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} J} = 2,757 \cdot 10^{11}$$

Ze wstępu teoretycznego wiemy, że:

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

Znak "-" w równaniu oznacza, że w po pewnym czasie liczba jąder maleje.
Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t} \tag{8}$$

Liczbę jąder plutonu określamy znając masę plutonowej kulki m_{Pu-239} oraz masę molową izotopu plutonu M_{Pu-239}:

$$M_{Pu-239} = 0,239 kg/mol$$

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} mol^{-1}$$

$$N = \frac{m_{Pu-239}}{M_{Pu-239}} \cdot N_A = \frac{0,1201kg \cdot 6,022{\cdot}10^{23}\frac{1}{mol}}{0,239\frac{kg}{mol}} = 3,026 \cdot 10^{23}$$

Do wzoru na czas połowicznego rozpadu 7 podstawiamy zależność 8:

$$T_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda} = \frac{ln2 \cdot N \cdot \Delta t}{\Delta N} = \frac{0,693 \cdot 3,026 \cdot 10^{23} \cdot 1s}{2,757 \cdot 10^{11}} = 7,606 \cdot 10^{11}s$$

Przy założeniu, że 1 rok ma 365 dni czyli 365·24·60·60 = 31536000 s, **czas połowicznego rozpadu Pu-239 $T_{1/2}$ = 24118 lat**.

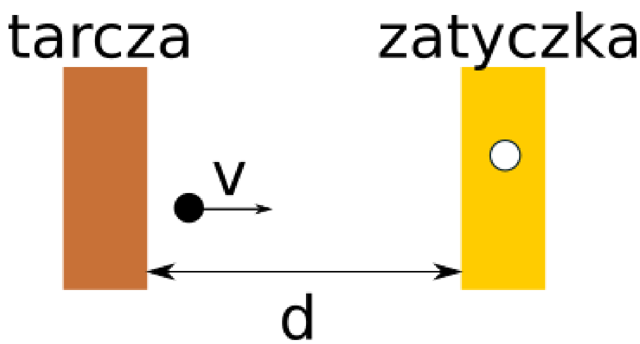
Zadanie 5 [14 punktów]

Wstęp:

Produktem radioaktywnego rozpadu jest najczęściej jądro znajdujące się w tzw. stanie wzbudzonym, czyli posiadające nadwyżkę energii. Energia ta jest zazwyczaj emitowana w małym ułamku sekundy w postaci kwantu promieniowania γ. Zdarza się jednak, że czas przebywania jądra w stanie wzbudzonym jest na tyle długi, że może on zostać zmierzony. Emisja kwantu promieniowania γ z poziomu wzbudzonego, podobnie jak każdy inny radioaktywny rozpad, podlega *prawu rozpadu promieniotwórczego*. Dysponując licznym zbiorem określonych jąder wzbudzonych nie jesteśmy w stanie przewidzieć, kiedy nastąpi rozpad każdego z nich, ale wiemy, że połowa z nich ulegnie rozpadowi w trakcie jednego *czasu połowicznego rozpadu* ($T_{1/2}$), 3/4 w trakcie $2T_{1/2}$ itd.

Jedną z metod badania czasu połowicznego rozpadu jąder wzbudzonych jest pomiar średniej odległości, jaką pokonają przed emisją promieniowania γ, a dokładniej, zmierzenie, jaka część jąder ulegnie rozpadowi γ dla różnych odległości. Jeśli wiązka jąder ma określoną prędkość (energię kinetyczną), pozwala to na bezpośrednie wyznaczenie czasu połowicznego rozpadu.

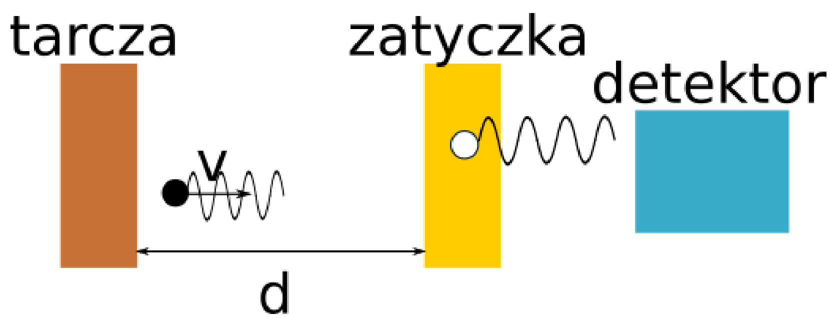
W praktyce konstruuje się układ (Rys. 5) składający się z tarczy (kolor brązowy), w której badane jądra są wytwarzane, oraz zatyczki (kolor żółty), w której jądra się zatrzymują. W zależności od odległości pomiędzy tarczą a zatyczką d, jądra, posiadające określoną prędkość i czas połowicznego rozpadu, w większości emitują promieniowania γ w locie (czarne koło) lub już po zatrzymaniu w zatyczce (białe koło). Zmieniając odległość d oraz mierząc, jaka część jąder rozpada się w locie, a jaka po zatrzymaniu, można wyznaczyć czas połowicznego rozpadu jąder $T_{1/2}$.



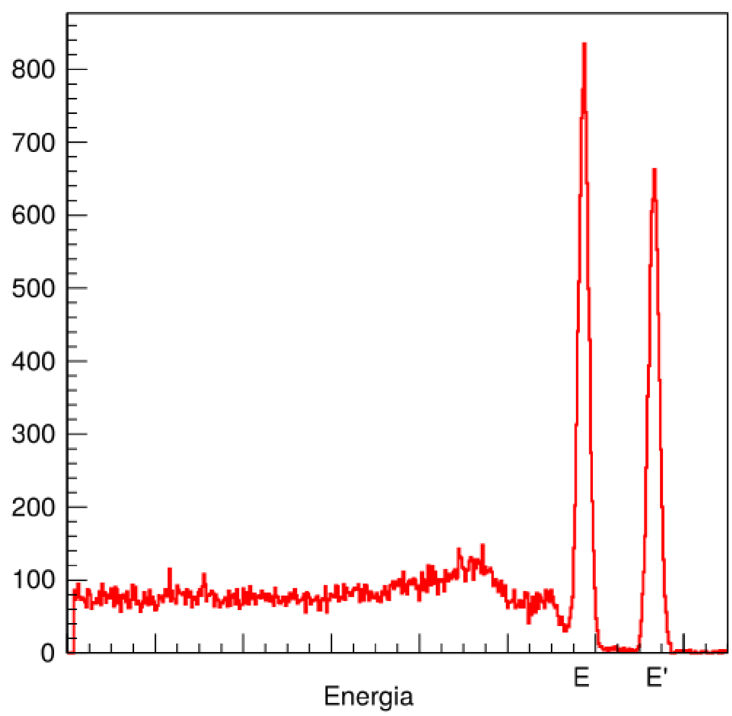
Rysunek 5: *Schemat układu służącego do pomiaru czasu połowicznego rozpadu jąder, źródło: opracowanie własne*

Pozostaje pytanie, jak rozróżnić jądra, które uległy rozpadowi γ w locie od jąder, które wyemitowały kwanty γ po zatrzymaniu. Aby to zrobić wykorzystuje się fakt, że promieniowanie elektromagnetyczne wyemitowane z obiektów ruchomych ma inną częstość od promieniowania wysyłanego przez identyczne obiekty pozostające w spoczynku, czyli *Efekt Dopplera*.

Załóżmy, że rozważane jądro wzbudzone emituje jeden kwant promieniowania γ o określonej energii E. Promieniowanie to jest mierzone przez detektor promieniowania jonizującego, Rys. 6. Jeśli jądro, z którego nastąpiła emisja promieniowania γ było w spoczynku, zmierzona energia kwantu γ wyniesie E (w prawdziwych detektorach sytuacja jest odrobinę bardziej skomplikowana), jeśli jednak jądro poruszało się w kierunku detektora, zmierzone promieniowanie ma większą częstość, a więc i energię. Efektem takiego pomiaru będzie widmo (czyli histogram zmierzonej energii) składające się z dwóch pików: odpowiadającego energii E oraz energii przesuniętej Efektem Dopplera *E'*, Rys. 7.



Rysunek 6: *Schemat układu służącego do pomiaru czasu połowicznego rozpadu jąder, źródło: opracowanie własne*



Rysunek 7: *Przykładowe widmo uzyskane podczas pomiaru promieniowania gamma wyemitowanego przez jądra w ruchu i w spoczynku, źródło: opracowanie własne*

Tym samym badając stosunek liczby zliczeń w piku o energii E do liczby zliczeń w piku o energii *E'* dla różnych wartości odległości d, można wyznaczyć czasu połowicznego rozpadu jąder $T_{1/2}$.

Zadanie:
1) Wyznacz, ile czasu t zajmuje jądrom o masie A i energii kinetycznej T pokonanie odległości d.
2) Wyznacz energię promieniowania γ wyemitowana z jąder o masie A posiadających energię kinetyczną T, jaka zostanie zmierzona przez detektor ustawiony zgodnie z powyższą ryciną. Załóż, że takie jądra, znajdując się w spoczynku, wyemitują promieniowanie γ o energii E.
3) Jaka część jąder ulegnie promieniotwórczemu rozpadowi w locie, jeśli jądra posiadają masę A, energię kinetyczną T, czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$, a odległość pomiędzy tarczą i zatyczką wynosi d.
4) Dysponując podanym widmem (patrz załączony plik tekstowy) określ, jaki jest czas połowicznego rozpadu dla badanego przejścia elektromagnetycznego. Odległość pomiędzy tarczą a zatyczką wynosi d = 100 μm, prędkość mierzonych jąder v = 1% c (jeden procent prędkości światła).

Rozwiązanie:

1.
$$t = \frac{s}{v}$$
$$E = \frac{mv^2}{2}$$
$$m = A$$
$$t = \frac{d}{\sqrt{\frac{2E}{A}}}$$

2. Zgodnie z prawem Dopplera, jeśli źródło porusza się z prędkością v_z to częstość fali, mierzonej przez nieruchomego obserwatora wyraża się wzorem:
$$f' = f_0 \frac{v}{v - v_z}$$
czyli tym samym:
$$E' = E \frac{c}{c - v_z}$$
prędkość źródła to:
$$v_z = \sqrt{\frac{2T}{A}}$$

3. Prawo rozpadu promieniotwórczego:

$$N = N_0 e^{\frac{-ln2t}{T_{1/2}}}$$

Rozpadowi ulegną $N_{rozp} = N_0 - N$
Część, która ulegnie rozpadowi jest więc:

$$n = \frac{N_{rozp}}{N_0} = 1 - \frac{N}{N_0} = 1 - e^{\frac{-ln2t}{T_{1/2}}}$$

Czas t obliczamy z odległości i prędkości jąder:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{\frac{2T}{A}}}$$

4. Czas połowicznego rozpadu można obliczyć odwracając powyższy wzór na n:

$$n = 1 - e^{\frac{-ln2t}{T_{1/2}}}$$

tym razem

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{0,01c}$$

W tym przypadku wszystkie jądra ulegną deekscytacji, liczba jąder, które wyemitowały promieniowanie γ w locie (N') i w spoczynku (N) oblicza się sumując odpowiednie obszary w załączonym widmie.
Wracając do oznaczeń z poprzedniego podpunktu:

$$n = \frac{N_{rozp}}{N_0} = \frac{N'}{N + N'}$$

$$\frac{N'}{N + N'} = 1 - e^{\frac{-ln2\frac{d}{0,01c}}{T_{1/2}}}$$

całościowo czas połowicznego rozpadu:

$$T_{1/2} = \frac{ln2\frac{d}{0,01c}}{ln(\frac{N+N'}{N})}$$